

А.Ю. Сидорчук 

Фрактальная геометрия речных сетей

Введение

Основатель фрактального подхода французский математик Бенуа Мандельброт [1] предположил, что речные сети фрактальны, и привел в качестве доказательства степенную зависимость между длинами рек и площадями их бассейнов, известную в западной литературе как закон Хака [2]. После этого оценкой фрактальной размерности речных сетей занималось большое число исследователей. Поисковая система SCIRUS (по ситуации на май 2012 г.) дала более 7000 ссылок на англоязычные статьи (из них более 800 в ведущих журналах), содержащие сочетания слов "речная сеть" ("river network") и "фракталы" ("fractals"). На русском языке опубликованы общие исследования по применению фрактального подхода в географии, геоморфологии и гидрологии [3-5]. В последнее время появились специальные работы по использованию фрактального подхода для анализа речных и эрозионных сетей [6-11]. Целью настоящей статьи не является обзор этой обширной литературы. Более целесообразным представляется рассмотрение базовых понятий фрактального подхода и оценка его применения для анализа геометрии речных сетей.

Основные понятия фрактального подхода

Основные понятия фрактального подхода излагаются по классической монографии Е. Федерера [12]. Термин "фрактал" был предложен Мандельбротом для обозначения сложных геометрических фигур, которые при неограниченном увеличении разрешения (увеличении изображения, масштабировании, скейлинге) не теряют своей сложности. Первоначально (цитируем по [12, стр. 19]) Мандельброт дал следующее определение: «Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа – Безиковича которого строго больше его топологической размерности» (определение А). В случае русловых сетей таким множеством является множество точек, образующих рисунок русловой сети. Топологической размерностью этого множества будет единица (размерность линии). Размерность Хаусдорфа-Безиковича D определяется как критическая размерность, при которой мера M_d , представляемая как сумма некоторой пробной степенной функции $\gamma(d)\delta^d$, в пределе скачком изменяет свое значение с 0 на бесконечность:

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } d > D \\ \infty & \text{при } d < D \end{cases} \quad (1)$$

Здесь δ – характерный размер некоторого измерителя, N – количество измерителей, необходимых чтобы покрыть геометрическую фигуру. Если измерителями являются прямолинейные отрезки (случай речной сети), то δ – это их длины, а коэффициент $\gamma(d)$ равен 1. При показателе степени d , равном размерности Хаусдорфа-Безиковича (или фрактальной размерности) D , и $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, мера M_D приобретает определенное значение. В этом предельном случае

$$\delta^D = \frac{M_D}{N(\delta)} \quad (2).$$

Фракталом сеть отрезков линий будет при $1 < D < 2$.

Формулу (2) можно представить в виде

$$\delta^{D-1} = \frac{M_D}{\delta N(\delta)} = \frac{M_D}{L(\delta)} \quad (3).$$

Здесь $L(\delta)$ – общая длина сети, измеренная (покрытая) с помощью отрезков длиной δ . Чем короче отрезок-измеритель, тем более точно измеряется общая длина речной сети и, соответственно, $L(\delta)$ увеличивается с уменьшением δ . Для практических вычислений D используются общие длины сети, измеренные с помощью отрезков (измерителей) разной длины ($\delta_2 > \delta_1$)

$$D - 1 = \frac{\ln L(\delta_1) - \ln L(\delta_2)}{\ln(\delta_2) - \ln(\delta_1)} \quad (4),$$

или же определяется угол наклона прямой на графике $L=f(\delta)$, построенном в логарифмических координатах (рис. 1).

Во многих работах по фракталам рассматриваются искусственно конструируемые сложные геометрические фигуры (см. [12]), для которых масштабирование (изменение разрешения, или согласованное изменение величин δ и N) быстро приводит к степенному закону (формула 2), и фрактальная размерность становится постоянной. Некоторые естественные фракталы также подчиняются степенному масштабированию, и на графике в логарифмических координатах зависимость суммарной протяженности объекта от величины измерителя описывается прямой линией. Таковыми являются некоторые сильно изрезанные береговые линии (такие как побережья Британии или Норвегии), которые стали классическими примерами фракталов. Так, для побережья Британии Л. Ричардсон получил степенную зависимость измеренной длины береговой линии от раствора циркуля, которым эта длина была измерена, задолго до появления самого понятия «фрактал» (см. [12], стр. 17).

По мере накопления сведений о фракталах выяснилось, что картина более сложна (см., например, [13]). Во-первых, многие фракталы являются неоднородными: размерность Хаусдорфа-Безиковича для таких фракталов разная для разных частей одного объекта и/или для одного и того же объекта в разные моменты времени. Для некоторых из неоднородных фракталов фрактальная мера характеризуется объединением взаимосвязанных фрактальных подмножеств, изменяющихся по степенному закону с различными показателями. Такие фракталы имеют мультифрактальную структуру. Во-вторых, можно конструировать фракталы, которые контролируются не одним, а несколькими измерителями с разными законами масштабирования. Такие фракталы называют самоаффинными.

Наконец, некоторые из естественных сложных объектов, которые описываются геометрическими фигурами, интуитивно относимые к неоднородным фракталам, не подчиняются законам степенного масштабирования и выпадают из класса объектов, к которым применимо первоначальное определение фрактала (определение А). Пробная функция $F(\delta)$ вполне может быть не степенной функцией $\gamma(d)\delta^d$, а иной функцией, различной для разных объектов, для частей одного объекта и для одного и того же объекта в разные моменты времени. Что считать размерностью для таких не хаусдорфовых фракталов, в общем виде сказать сложно.

Для того, чтобы все эти неоднородные сложные геометрические объекты тоже вошли в семейство фракталов, Мандельброт ввел более широкое и более расплывчатое определение В: фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому (цитируем по [12] стр. 19, где это определение названо более узким, чем определение А). При рассмотрении речных сетей мы будем придерживаться этого второго определения, но при этом не отходить далеко от первого определения, так как именно оно дает возможность вычисления фрактальной размерности.

Рисунок речных сетей.

Для вычисления фрактальной размерности речной сети необходимо кодирование ее рисунка, которое может осуществляться разными способами. Стандартная процедура выделения разных рек «снизу вверх», применяемая в гидрографии, предполагает назначение устья и истока для главной реки, затем для всех притоков, впадающих в главную реку, далее для притоков этих притоков и т. д., вплоть до бесприточных водотоков (постоянных и временных). В качестве кодов обычно используются названия

водотоков или их последовательные номера. Существует также система выделения водотоков «сверху вниз» по Хортону [14], когда назначаются точки истоков бесприточных водотоков первого порядка, слияние которых дает исток водотока второго порядка и т. д. Эта система имеет множество модификаций кода водотоков и также часто используется исследователями речных сетей. В настоящей работе использована первая система кодирования как более удобная для вычисления фрактальных размерностей. При этом длина река измеряется по осевой линии, которая повторяет изгибы речного русла во время межени.

Речная сеть (сеть постоянных и пересыхающих водотоков) в каждый конкретный момент времени является только частью эрозионно-русловой сети, которая включает в себя и временные водотоки самых разных размеров. При кодировании водотоков «снизу вверх» речная сеть полностью совпадает с эрозионно-русловой сетью вплоть до некоторой минимальной длины притоков.

Наиболее объективным источником рисунка речной сети являются аэрофотоснимки и космические изображения крупного масштаба, полученные как в оптическом, так и в иных диапазонах. Результат их интерпретации – современные топографические карты крупного масштаба, на которых постоянные и пересыхающие водотоки показаны синими сплошными и прерывистыми линиями и лентами, причем уровень генерализации регламентируется соответствующими наставлениями. Если источник информации содержит данные о вертикальных координатах и характере подстилающей поверхности, то рисунок эрозионно-русловой и речной сети можно получить путем обработки цифровой модели местности и, в первую очередь, цифровой модели рельефа. Достоверность результата будет определяться горизонтальным разрешением изображения (размером пикселя) и разрешением съемки по вертикали, а также способом получения упорядоченной цифровой модели из массива координат.

Для территории Северной Евразии в границах бывшего СССР имеются данные инвентаризации водных объектов, выполненной в 1960-66 гг. управлениями Гидрометеослужбы СССР. Задачей инвентаризации являлся подсчет числа и размеров водотоков по единой методике и на единой картографической основе (карта м-ба 1:100000). Были составлены списки всех рек длиной более 10 км, измерена их длина, а для более крупных рек (обычно длиной свыше 50 км) определена площадь водосбора. Количество самых малых рек (менее 10 км длиной, но не менее 0,5 км в равнинных

районах и 1 км в горных) и их общая длина подсчитывались суммарно по бассейнам малых и средних рек. Результаты инвентаризации приведены в [15] и обобщены в [16]. В настоящее время для всей территории Северной Евразии нет открытых цифровых моделей местности, которые давали бы большее разрешение для анализа рисунка речных сетей, чем топографическая карта м-ба 1:100000 (более точные данные имеются только для отдельных районов и представляют собой дорогостоящий коммерческий продукт). Поэтому в настоящем исследовании использованы доступные данные инвентаризации 1960-66 гг. [15, 16].

Характер фрактальности речных сетей.

Речные сети (и в еще большей степени эрозионно-русловые сети) фрактальны в рамках В-определения Мандельброта, так как они самоподобны лишь в некотором смысле. Это самоподобие выражается в сохранении древовидного рисунка при масштабировании, хотя структура этой древовидности может быть разной при разной степени разрешения изображения. Главное условие фрактальности объектов – неисчезающая сложность при увеличении масштаба – сохраняется для речных сетей Северной Евразии вплоть до элементов длиной около 1 км. При дальнейшем увеличении масштаба речные сети не усложняются. Эрозионно-русловые сети сохраняют сложность при масштабировании вплоть до размера элементов в несколько сантиметров – отдельных струек воды на склоне во время дождя. Если же включить в сеть водных потоков и гравитационные воды в системе макропор, пор и капилляров почвы, то сохранение сложности таких сетей происходит вплоть до размера отдельных элементов в доли миллиметра.

Для дальнейшего анализа ограничимся речными сетями с минимальной длиной элементов 1 км. Так как в [15] все длины рек даны с учетом их извилистости в условиях межени, а измеритель представляет собой прямолинейный отрезок, то анализируется «выпрямленная» речная сеть. Будем строить зависимость суммарной длины русловой сети от длины измерителя, придерживаясь методики, предложенной Л. Ричардсоном [см. 2, 12]. Измерителем в данном случае будут длины рек, входящих в систему, в порядке их убывания (до 1 км). Для выполнения этой процедуры имеется несколько источников информации.

Во-первых, это таблица 2 в [15], в которой содержатся сведения о каждом водотоке длиной более 10 км: о его наименовании (и разночтениях), о том, куда и где (на каком километре от устья водоприемника) он впадает, о его длине и, иногда, площади

водосбора, а также о количестве и суммарной длине принимаемых им притоков длиной менее 10 км. Из этой таблицы выделяется список длин всех K рек для исследуемого речного бассейна, эти длины располагаются в порядке убывания и каждой i -той из них (измерителю δ_i) ставится в соответствие сумма всех длин не меньше i -той – $L_i(\delta)$. В логарифмических координатах строится график зависимости суммарной длины $L_i(\delta)$ от длины измерителя δ_i .

Во-вторых, это таблица 2а в [15] и таблицы 1 и 2 в [16], где сведены данные таблицы 2 из [15] о количестве и суммарной длине рек в девяти градациях длин более чем для 200 бассейнов рек и морей (и для их крупных частей), а также для всей территории бывшего СССР. По этим таблицам также составляются списки в порядке убывания длин рек, суммируются длины рек длиной более данной (т.е. длины измерителя, которой является нижняя граница каждой из девяти градаций), и также в логарифмических координатах строится график зависимости суммарной длины $L_i(\delta)$ от длины измерителя δ_i . В-третьих, это таблица 3 из [16], где более чем для 150 бассейнов рек даны общая длина всех водотоков и суммарная длина водотоков длиной менее 10 км. По этим данным можно рассчитать частную фрактальную размерность для водотоков длиной 1-10 км.

Графики зависимостей общей длины $L_i(\delta)$ от длины измерителя δ_i для ряда крупных рек Северной Евразии (рис. 1) показывают, что структуры речных сетей разных бассейнов в целом статистически подобны: линии на рис. 1 образуют семейства параллельных друг другу линий. При этом полного самоподобия у конкретных речных сетей нет: наклон каждой линии, или фрактальная размерность по формуле (4), меняется с изменением длины измерителя на всем протяжении графика (также см. [12], стр. 205-208). Степенной закон при масштабировании не выдерживается даже в пределе (когда длина измерителя стремится к минимуму), так что говорить о фрактальности степенного (Хаусдорфова) вида нельзя. Тем не менее, можно выбрать достаточно протяженные части графиков на рис. 1 (обычно в интервале $1 < \delta_i < 100$ км), которые довольно хорошо аппроксимируются единым степенным законом

$$L(\delta) = M_D \delta^{1-D} \quad (5).$$

Еще лучше эти части графиков аппроксимируются степенной зависимостью с переменным показателем степени и переменной мерой:

$$L(\delta) = M_{D_0} \exp(-a\delta) \delta^{1-D_0 \exp(b\delta)} \quad (6).$$

В пределе (при $\delta \rightarrow 0$) эти две зависимости и их производные совпадают. Конечно, такое предельное соотношение выходит за рамки физически существующей речной сети, как и

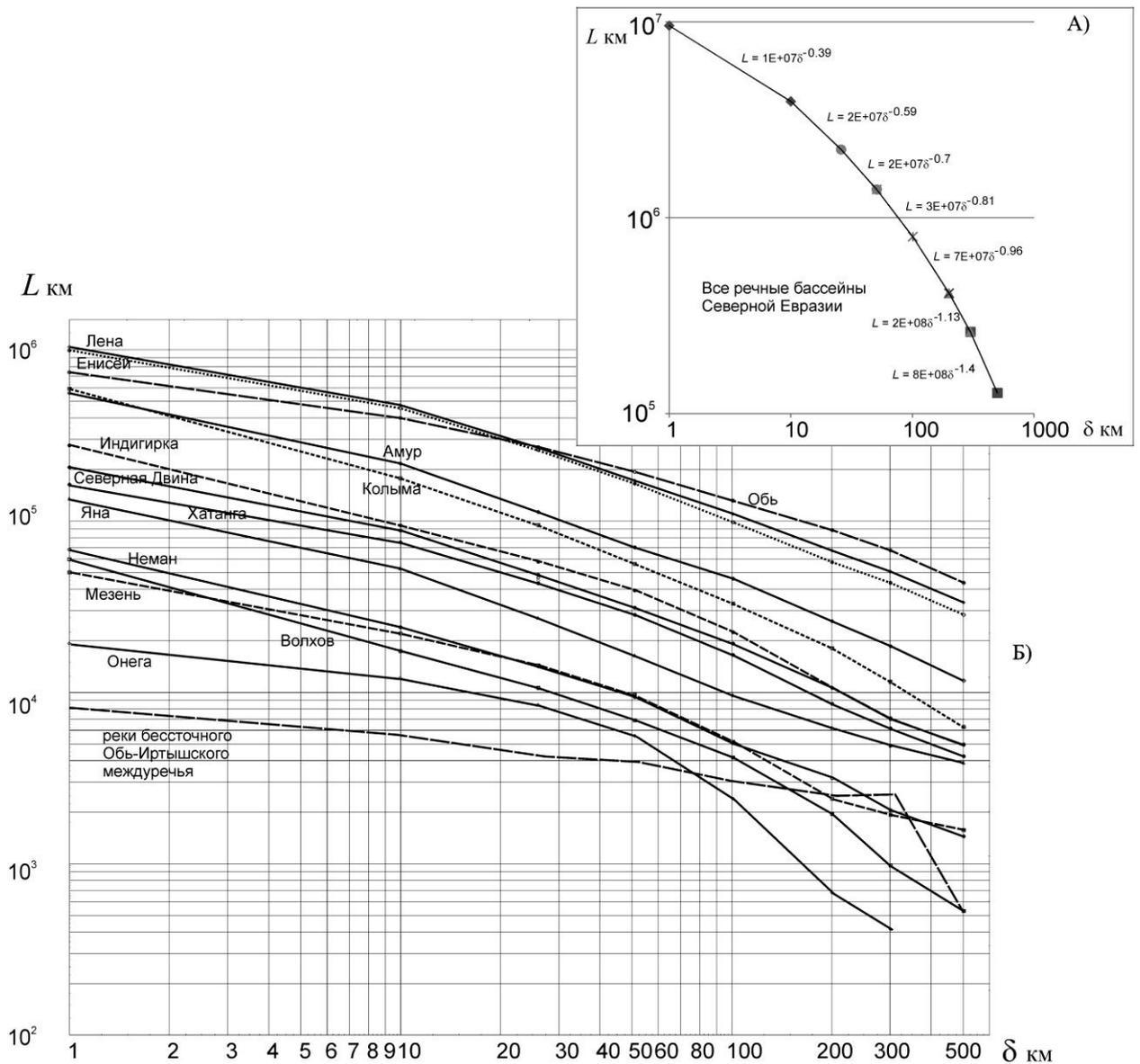


Рис.1. Зависимость общей длины $L_i(\delta)$ от длины измерителя δ_i для всей речной сети Северной Евразии (А) и отдельных крупных речных бассейнов (Б). Источник информации – таблицы 1 и 2 из [16]

для всех естественных фракталов. Так как коэффициент b намного меньше единицы, на физическом пределе существования речных сетей ($\delta = 1$ км) различия между D и D_0 в формулах (5) и (6) составляют лишь первые проценты.

На участках с длиной измерителя 26–10 км и 10–1 км экспериментальные кривые хорошо аппроксимируются как более сложной формулой (6), так и более простой степенной формулой (5). Фрактальные размерности для этих участков, полученные по формуле (5) (D_{10} и D_1 соответственно), близки по величине к предельной фрактальной размерности D_0 , полученной по формуле (6). Эти величины связаны между собой линейными

зависимостями, и именно их распределение по территории Северной Евразии будет проанализировано ниже.

Величина фрактальной размерности, согласно формулам (5) и (6), указывает на степень елинейности увеличения общей длины речной сети по мере включения в нее элементов с уменьшающейся длиной, а также на степень неравномерности вклада относительно более длинных и относительно более коротких рек в общую длину речной сети. Это видно из производной длины речной сети по длине измерителя. Для формулы (5) она записывается, как

$$\frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta} = (1 - D)M_D \delta^{-D} \quad (7).$$

Эта формула соответствует усеченному степенному распределению, когда усечение проводится при $\delta_{\min}=1$. Для формулы (6) выражение для производной более сложное, но величина производной мало отличается от вычисленной по (7).

При $D > 1$ прирост общей длины речной сети с уменьшением δ тем больше, чем меньше δ и чем больше D . Это означает, что с увеличением D в древовидном рисунке речной сети и в общей ее длине начинают все более и более доминировать реки относительно малой длины. Так, согласно формуле (7), вклад рек ΔL в диапазоне длин от δ_1 до δ_2 ($\delta_2 > \delta_1$) в

общую длину речной сети $P = \frac{\Delta L}{\sum L_{>\delta_0}}$ связан с фрактальной размерностью зависимостью

$$P = \left(\frac{\delta_1}{\delta_0} \right)^{1-D} - \left(\frac{\delta_2}{\delta_0} \right)^{1-D} \quad (8).$$

Здесь δ_0 – самая малая длина измерителя для естественного фрактала, в случае речных сетей Северной Евразии равная 1 км. Из (8) следует, что доля рек с длинами в диапазоне 1-10 км изменяется от ~20% при $D=1,1$ до 90% при $D \rightarrow 2$. Формула (6) дает несколько иные цифры, но ту же тенденцию.

Распределение величины фрактальной размерности речных сетей по территории Северной Евразии

Рассмотрим распределение величины D_1 – частной фрактальной размерности, вычисленной для участков речной сети в диапазоне длин водотоков 1–10 км, по территории Северной Евразии в границах бывшего СССР (рис. 2).

$$D_1 = 1 - \frac{\ln L(\delta_{>1}) - \ln L(\delta_{>10})}{\ln(1) - \ln(10)} = 1 + \frac{\ln L(\delta_{>1}) - \ln L(\delta_{>10})}{2.3036} \quad (9).$$

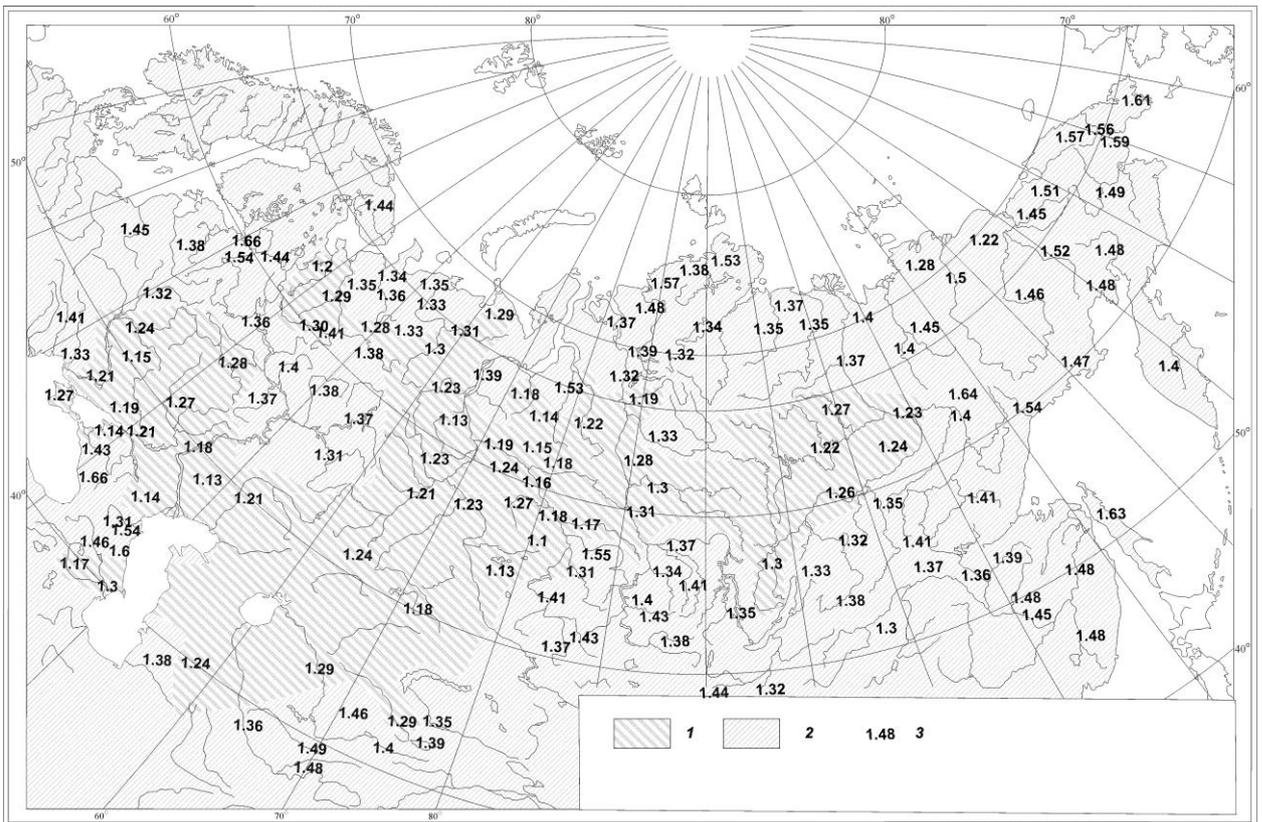


Рис. 2. Картограмма распределения величины фрактальной размерности D_1 по территории Северной Евразии. Источник информации – таблицы 1 и 3 из [16]. бассейны с D_1 : 1 – $<1,3$, 2 – $\geq 1,3$; 3 – величины D_1 для отдельных бассейнов

Этому диапазону измерителя соответствуют самые малые реки с долей P_1 в общей длине речной сети

$$P_1 = 1 - 10^{(1-D_1)} \quad (10).$$

Как уже упоминалось, величина D_1 связана линейными зависимостями с величинами D_{10} и D_0 .

Для территории Северной Евразии фрактальная размерность речных сетей изменяется в диапазоне 1,1 – 1,7, что соответствует суммарной длине самых малых рек длиной 1–10 км 20-80% от общей длины речной сети. Если рассматривать фрактальные размерности отдельных речных бассейнов как некоторую случайную переменную, то ее распределение соответствует нормальному распределению с большой степенью точности (рис. 3). Это говорит о большом количестве факторов, которые влияют на величину фрактальной размерности речной сети, т. е. на ее структуру. Многофакторность явления не позволяет ожидать значительных корреляций с отдельными факторами, однако на уровне тенденций они все же прослеживаются.

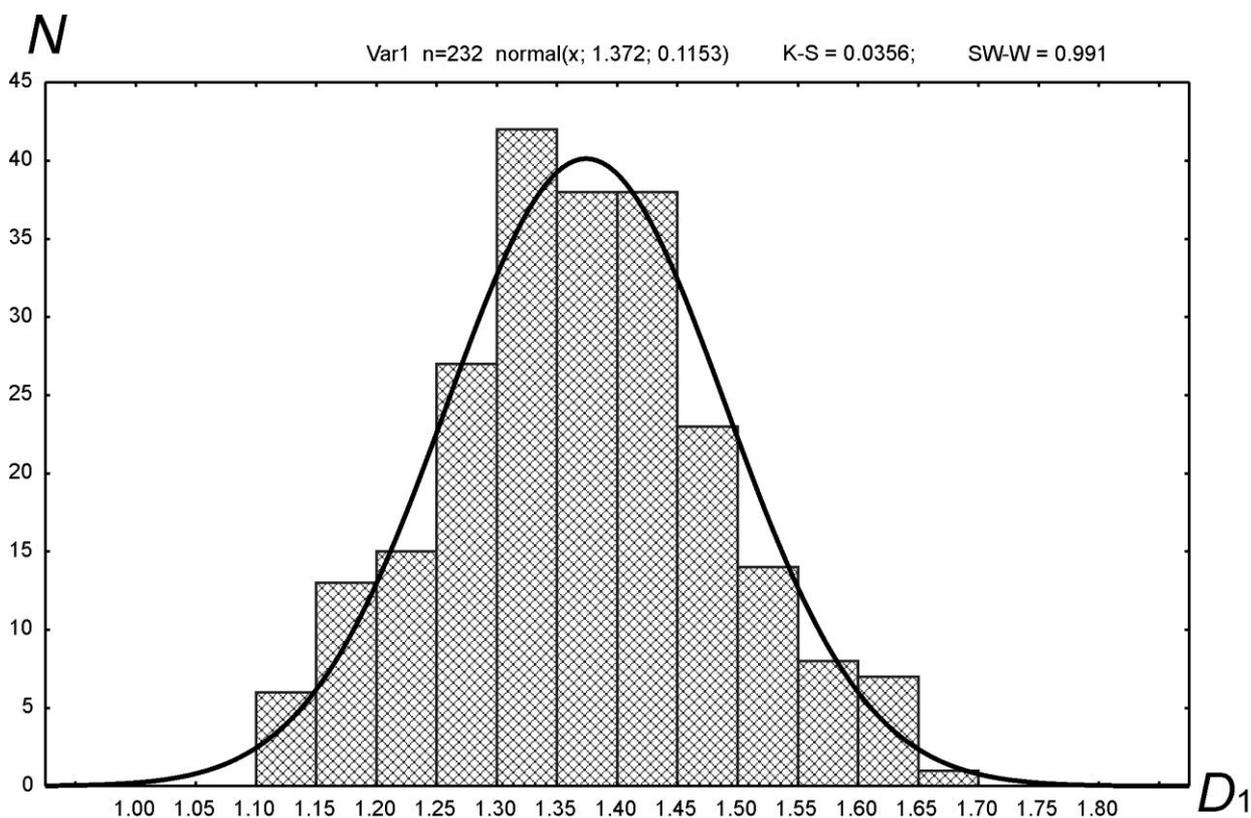


Рис. 3. Гистограмма величин фрактальной размерности D_1 для речных бассейнов Северной Евразии

Во-первых, достаточно очевидна связь фрактальной размерности с высотой речного водосбора, т. е. с глубиной вреза речной сети. Все речные бассейны с $D_1 < 1,3$ (доля самых малых рек длиной 1–10 км $P_1 < 50\%$) расположены на равнинах Северной Евразии – Восточно-Европейской, Западно-Сибирской и Центральнокутской. Для среднегорья и для гор характерны значения D_1 1,4–1,5 и до 1,7 (P_1 60-70 и до 80%). Корреляция D_1 со средней высотой водосбора H слабая (рис. 4), но тенденция увеличения фрактальной размерности и доли самых малых рек в длине речной сети с ростом H достаточно отчетливая. Следует иметь в виду, что рис. 4 построен по данным таблицы 2 из [16] для достаточно крупных водосборов с площадью более 10000 км², так что осреднение по площади как для D_1 , так и для H велико. Средние высоты водосборов получены по ГИС HYDRO1k, предоставляемой Геологической службой США [17].

Во-вторых, видна связь фрактальной размерности с увлажненностью территории, в первую очередь, равнинной. На Восточно-Европейской равнине D_1 уменьшается с севера на юг и с запада на восток, следуя уменьшению слоя осадков и стока, а также понижению уровня грунтовых вод. В Западной Сибири зональность не столь отчетлива, так как территория заболочена. Тем не менее, минимальная фрактальная размерность отмечается

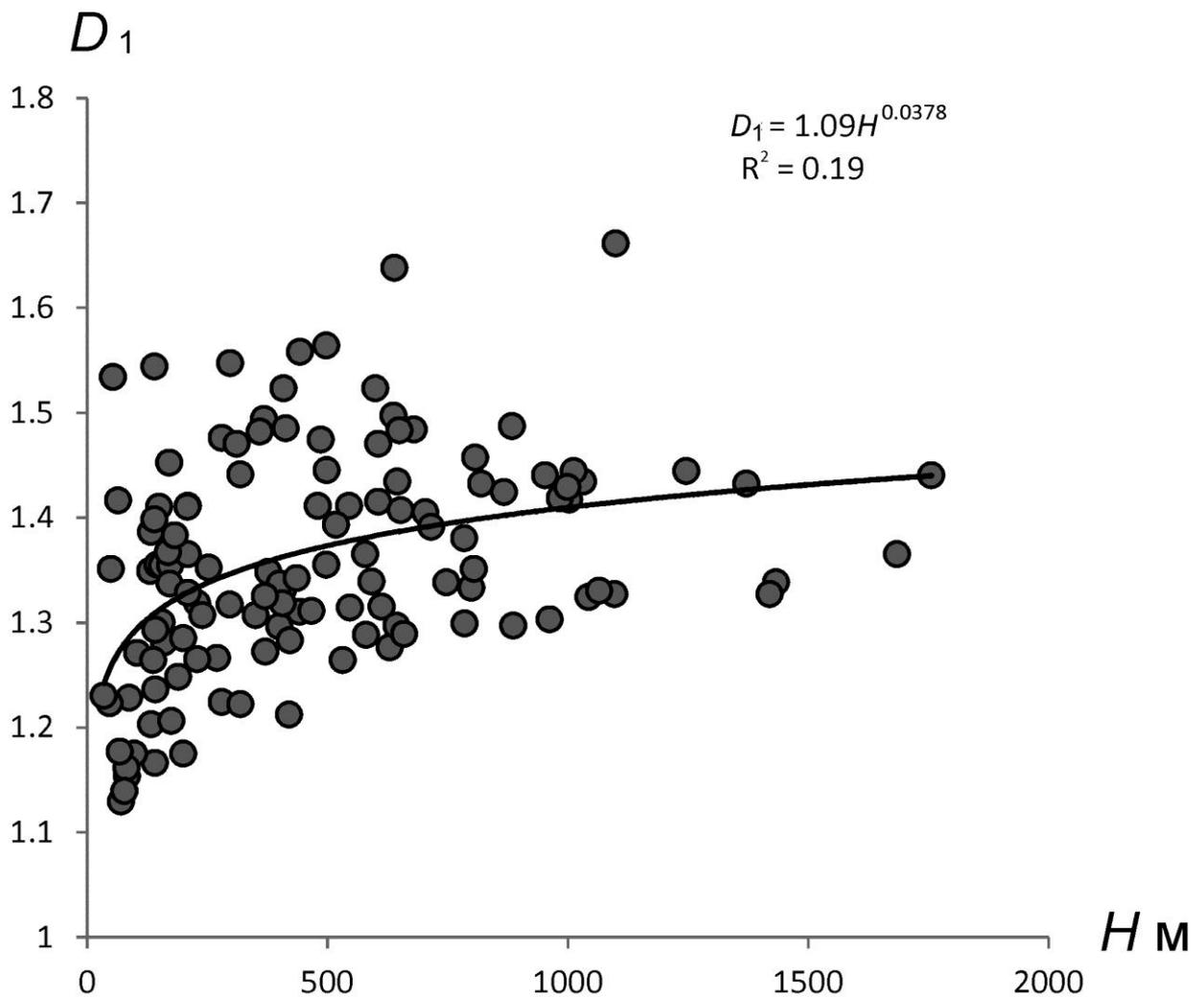


Рис. 4. Зависимость величины фрактальной размерности D_1 речных сетей Северной Евразии от средней высоты водосбора H

на менее увлажненной южной части низменности, южнее широтного отрезка Оби, а севернее фрактальная размерность увеличивается с ростом увлажненности. В среднегорье и высокогорье величина фрактальной размерности не зависит от увлажненности территории, во всяком случае, для больших водосборов (рис. 5).

Кроме региональных закономерностей можно обнаружить локальные зависимости фрактальной размерности от литологии речного водосбора, структуры слагающих его горных пород, от истории развития рельефа. Например, фрактальная размерность для всего водосбора реки Пур равна 1,5, а для бассейна р. Пяку-Пур, где широкое распространение имеют пески, фрактальная размерность уменьшается до 1,1. Самая малая фрактальная размерность на территории Северной Евразии (1,09) отмечается для рек в той части междуречья Оби и Иртыша, где в рельефе выражены крупные субширотные гряды, определяющие перистый рисунок речной сети с доминированием относительно крупных

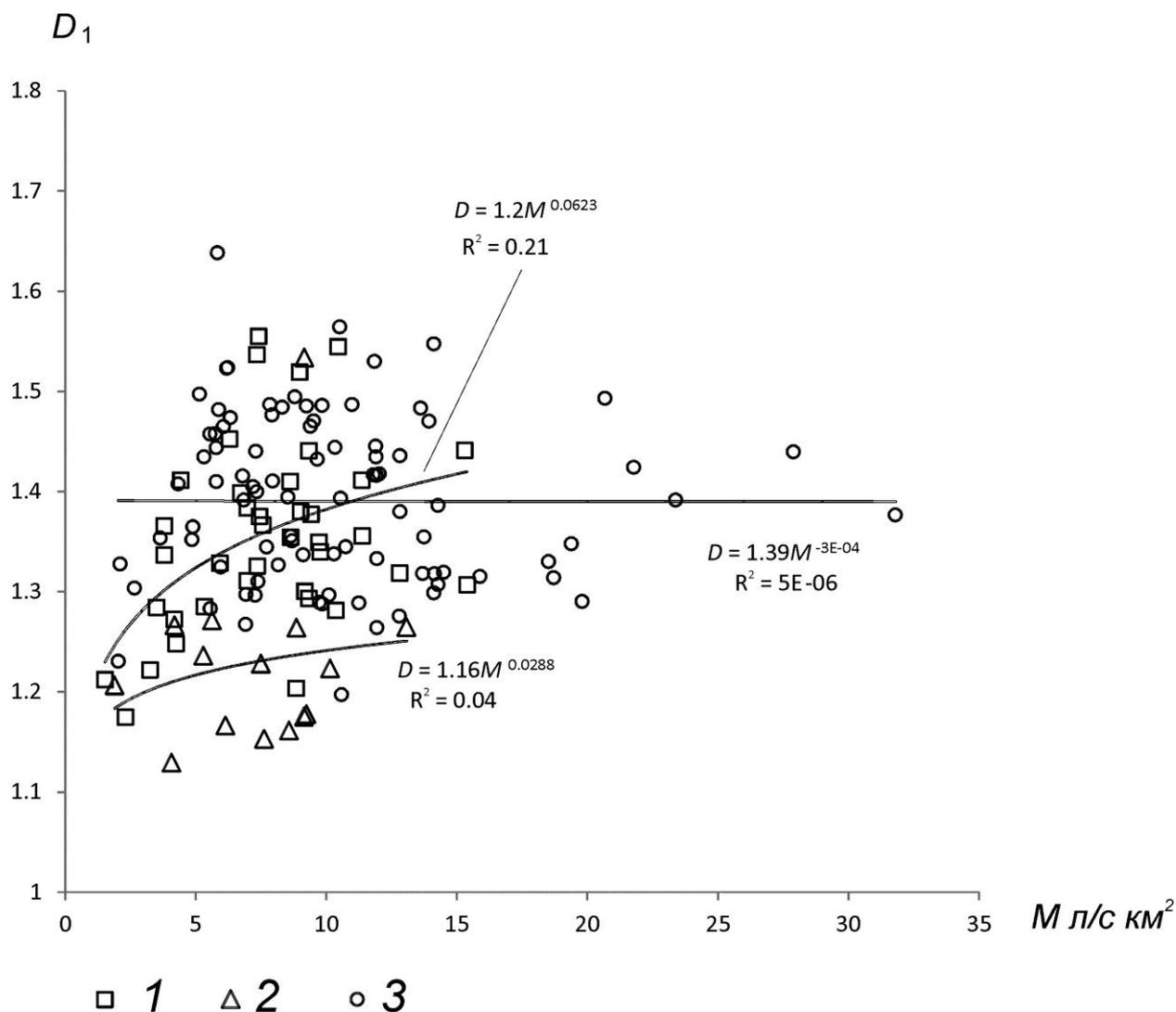


Рис. 5. Зависимость величины фрактальной размерности D_1 речных сетей Северной Евразии от годового слоя стока M (л/с км²) для Восточно-Европейской равнины (1), Западно-Сибирской низменности (2), среднегорья и высокогорья (3)

водотоков. Вероятно, при включении в рассмотрение водосборов с площадью менее 10000 км² влияние многих факторов на фрактальную размерность проявится более отчетливо.

Обсуждение результатов

Фрактальная размерность как показатель неравномерности распределения рек по длинам в речной сети не имеет аналога среди других морфометрических показателей, которые используются при описании речных сетей. Наиболее близкими к ней являются бифуркационные отношения в системе Хортонa, но и здесь для получения единого показателя – фрактальной размерности D – требуются два бифуркационных отношения – отношение числа водотоков двух последующих порядков R_N и отношение длин водотоков двух последующих порядков R_L (см [12], стр.208).

Что касается величины меры M_D , то, согласно формулам (5) и (6), она равна суммарной длине речной сети при $\delta=1$. Это очень удобно, так как все справочные источники [15, 16] содержат сведения о полной длине речной сети, т. е. о сумме длин рек с минимальной длиной около 1 км, которая и есть мера M_D в километрах. Мера и фрактальная размерность для рек Северной Евразии между собой не связаны, так как при одинаковой общей длине речной сети на водосборе распределение рек по диапазонам длин может быть самое разное.

В принципе, анализ величин M_D и D не требует фрактального подхода и терминологии: можно просто рассматривать эмпирические формулы (5) и (6) как усеченное степенное и квазистепенное распределения. Тем не менее, если применить фрактальный подход и трактовать D как нецелую размерность неевклидова вида, то возникают дополнительные соображения. Так, все эмпирические данные о структуре речных сетей дают величины фрактальной размерности в диапазоне 1,1–1,7, хотя усеченное степенное распределение может характеризоваться показателями степени более 2. Формулы (5) или (6) в принципе допускают величины $D>2$, однако такие значения для естественных речных сетей не встречаются. Все исследованные речные сети соответствуют положениям фрактального подхода, согласно которому их размерность больше евклидовой размерности линии (единица) и меньше евклидовой размерности плоскости (два). Обычно говорят о степени покрытия плоскости линиями фрактального объекта, которая увеличивается с увеличением D . Для речных сетей можно сделать вывод, что площадь водосбора F должна положительно коррелироваться с мерой M_D , а фрактальная размерностью D – с плотностью речной сети.

Эмпирические данные подтверждают такие корреляции (рис. 6): площади водосборов рек Северной Евразии линейно связаны с мерами M_D (т. е. суммарными длинами рек длиной не менее 1 км), а отношения $K_D=M_D/F$ (которые можно назвать фрактальной плотностью речной сети) – с фрактальными размерностями (рис. 7). Общая связь (достоверность аппроксимации $R^2=0.608$) выглядит следующим образом:

$$M_D = 1.4(D_1 - 1)F \quad (12)$$

В области больших значений фрактальной размерности эта связь лучше аппроксимируется экспонентой

$$\frac{M_D}{F} = 0.17 \exp[2.77(D_1 - 1)] \quad (13)$$

но достоверность аппроксимации слегка уменьшается ($R^2=0.58$)

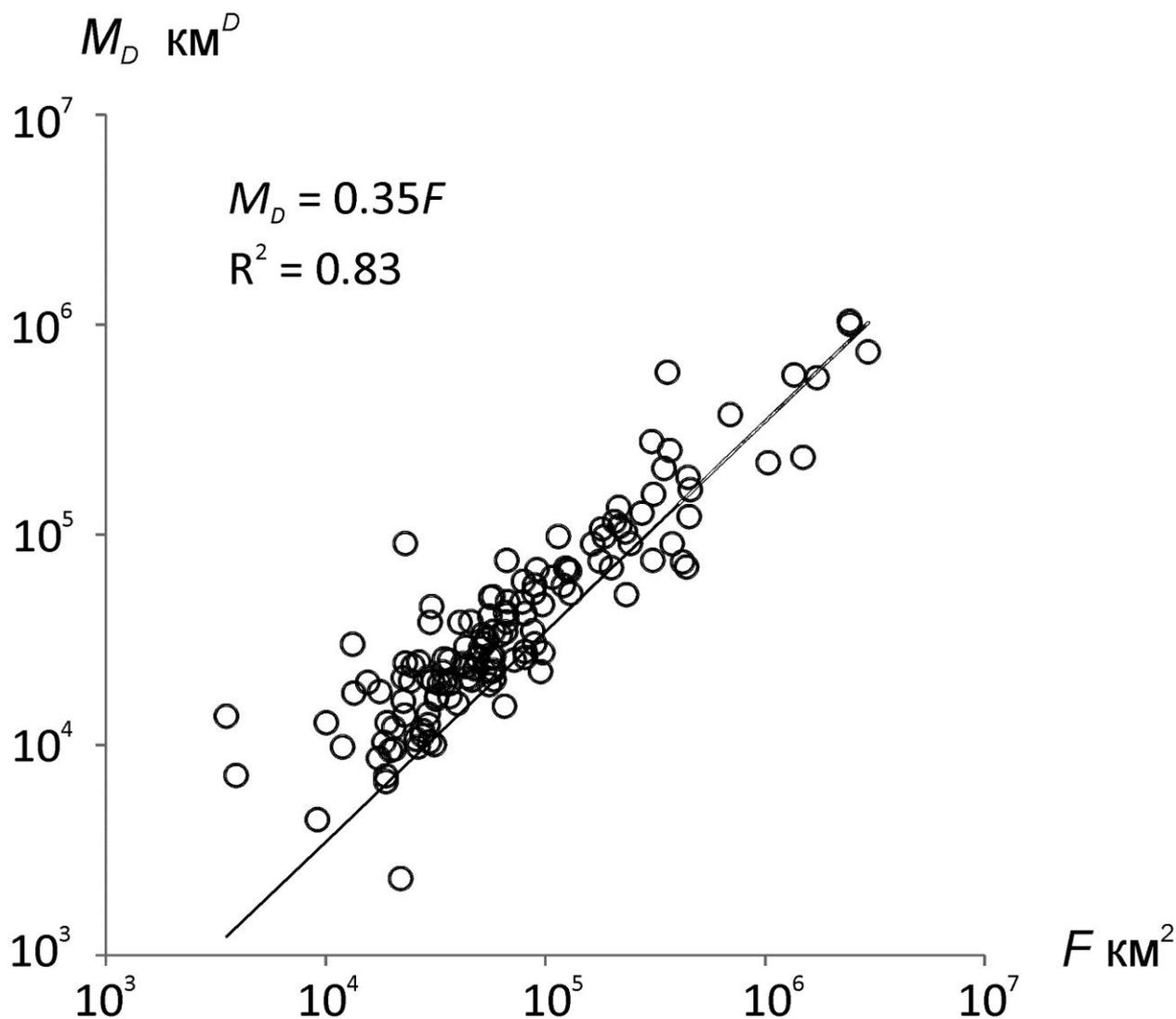


Рис. 6. Связь меры M_D (км^D) с площадью водосбора F (км^2) для рек Северной Евразии.

Достоверность аппроксимации незначительно увеличивается при использовании более сложных полиномиальных описаний зависимости на рис. 7. Так, при аппроксимации полиномом второй степени $R^2 = 0.611$

$$\frac{M_D}{F} = 0.77(D_1 - 1)^2 + 0.84(D_1 - 1) + 0.1 \quad (14)$$

Нелинейные аппроксимации дают положительный свободный член. Тогда при фрактальной размерности $D_1=1$ имеется ненулевая густота речной сети $M_D/F = 0.1-0.17$, что имеет определенный физический смысл.

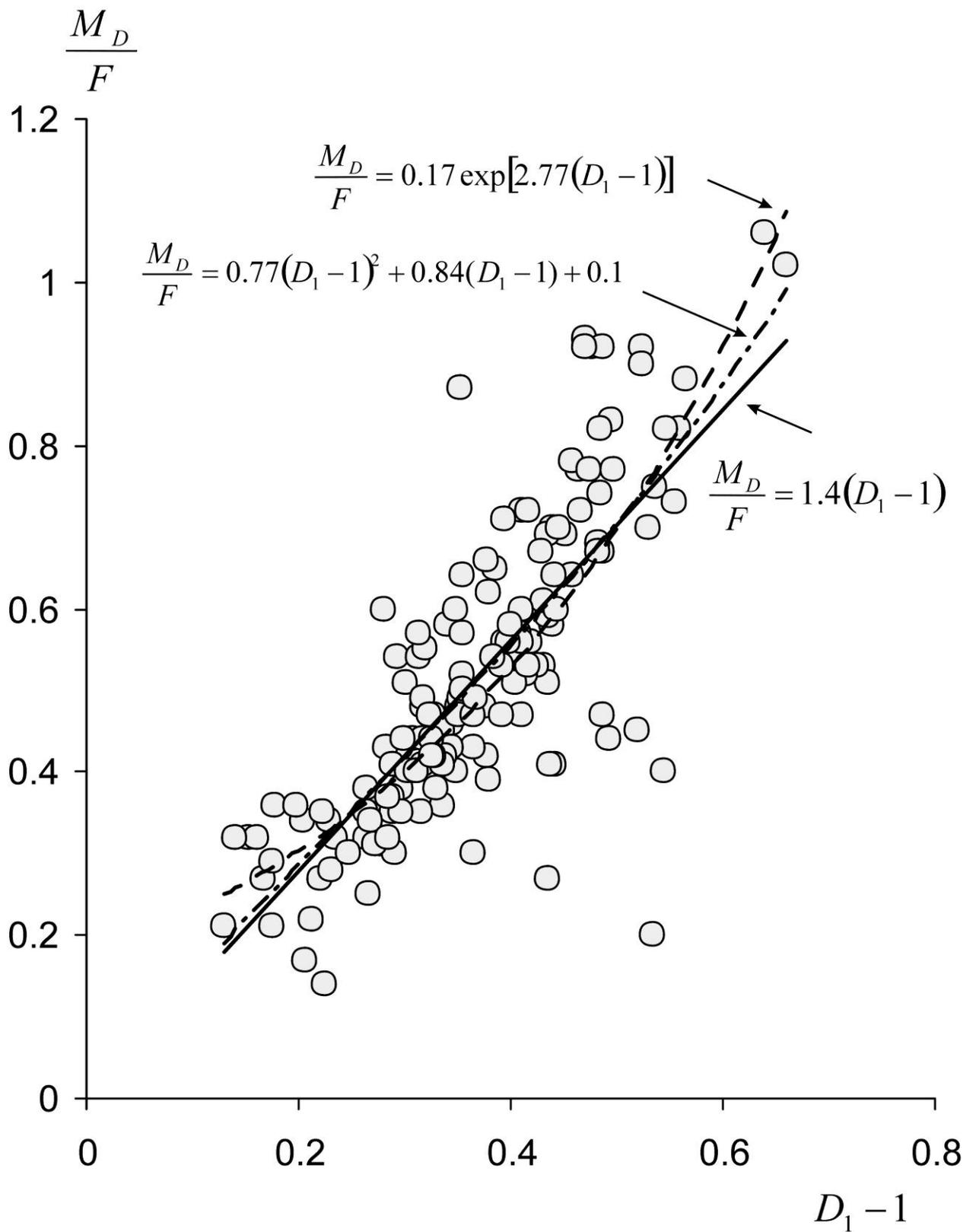


Рис. 7. Связь густоты K_D ($\text{км}^D/\text{км}^2$) с величиной фрактальной размерности D_1 речных сетей Северной Евразии

Выводы

Анализ структуры речных сетей Северной Евразии указывает как на наличие фрактальности, так и на ее отличие от хорошо исследованной фрактальности степенного масштабирования. В области физического существования речных сетей с минимальной длиной отрезка-измерителя около 1 км зависимость суммарной длины речной сети от длины измерителя не описывается двухпараметрическим степенным законом, но требует введения дополнительных параметров. Одним из вариантов аппроксимации, в пределе сохраняющим все характеристики степенного масштабирования, является формула (6) с переменным показателем степени и переменной мерой степенного масштабирования. Другим вариантом является частная аппроксимация нестепенной зависимости степенным законом (5) на некотором участке общей кривой и получение частных фрактальных размерностей (таких как D_1 и D_{10}).

Исследования структуры речных сетей Северной Евразии дают эмпирические величины фрактальной размерности в диапазоне 1,1–1,7. Таким образом, все исследованные речные сети соответствуют положениям фрактального подхода, согласно которому их фрактальная размерность должна быть больше эвклидовой размерности линии (единица) и меньше эвклидовой размерности плоскости (два). Такой результат не является следствием вида использованных для вычислений формул (5) или (6), в которых нет ограничений на величины показателей степени.

В рамках фрактального подхода с увеличением фрактальной размерности D увеличивается степень покрытия плоскости линиями фрактального объекта. Для речных сетей Северной Евразии это положение полностью подтверждается эмпирической зависимостью (12). Меры M_D положительно коррелированы с площадями водосборов F , а для водосборов равной площади величина меры (т. е. характеристика суммарной длины фрактальной речной сети) увеличивается с увеличением фрактальной размерности. Это означает, что с увеличением фрактальной размерности увеличивается степень покрытия площадей водосборов Северной Евразии линиями речной сети. Этот результат также никак не связан с видом формул, используемых для вычисления фрактальных характеристик, а полностью определяется эмпирическими данными.

Фрактальная размерность как показатель распределения рек по длинам в речной сети имеет определенные преимущества по сравнению с другими морфометрическими показателями, которые используются при описании речных сетей. Фрактальный подход

существенно увеличивает возможности количественного описания речных и эрозионно-русловых сетей.

Литература

1. *Mandelbrot B.B.* Fractals: Form, Chance, and Dimension. San Francisco: W.H. Freeman, 1977. 365 p.
2. *Hack J.* Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland // U.S. Geological Survey Professional Paper 294-B. 1957. 53 p.
3. *Васильев Л.Н.* Фрактальность и самоподобие природных пространственных структур // Изв. РАН. Сер. геогр. 1992. № 5. С. 25–35.
4. *Никора В.И.* Фрактальные свойства некоторых гидрологических объектов. Кишинев: ИГИГ АН МССР, 1988. 43 с.
5. *Пузаченко Ю.Г.* Приложение теории фракталов к изучению структуры ландшафта // Изв. РАН. Сер. геогр. 1997. № 2. С. 24–40.
6. *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* Фрактальная размерность структуры русловой сети дельты Селенги // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. № 2. С. 165–169.
7. *Иванов А.И., Короновский А.А., Минюхин И.А., Яшков И.А.* Определение фрактальной размерности овражно-балочной сети города Саратова // Прикладная нелинейная динамика (Известия вузов). 2006. Т. 14. № 2. С. 64–74.
8. *Мельник М.А.* Фрактальные закономерности форм рельефа (на примере эрозионного расчленения поверхности и извилистости рек): Автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Томск: СО РАН, 2007. 19 с.
9. *Мельник М.А., Поздняков А.В.* Фракталы в эрозионном расчленении поверхности и автоколебания в динамике геоморфосистем // Геоморфология. 2008. № 3. С. 86–95.
10. *Учаев Д.В.* Методика геоинформационного моделирования речных сетей на основе фрактальных методов. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М.: МИИГАиК, 2007. 24 с.
11. *Чушкова С.А.* Фрактальные методы выявления скрытой регулярности в эрозионном расчленении поверхности (на примере анализа Саяно-Тувинского нагорья, Республика Тува). Автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Томск: СО РАН, 2010. 16 с.
12. *Федер Е.* Фракталы. М: Мир, 1991. 254 с.
13. Фракталы в физике / Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. М.: Мир, 1988. 672 с.
14. *Хортон Р.Е.* Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. М. –Л.: Изд-во иностр. лит., 1948. 158 с.

15. Ресурсы поверхностных вод СССР. Гидрологическая изученность. Т. 1–20, Л.–М.: Гидрометеиздат, 1958–1962.
16. Доманицкий А.П., Дубровина Р.Г., Исаева А.И. Реки и озера Советского Союза. Л.: Гидрометеиздат, 1971. 104 с.
17. http://eros.usgs.gov/#/Find_Data/Products_and_Data_Available/gtopo30/hydro