А.Ю. Сидорчук
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

СТРУКТУРА РУСЛОВЫХ СЕТЕЙ[1]

Введение. Структура сложных систем – есть множество связей между элементами системы, выбранных некоторым организованным образом для синтеза системы [Месарович, 1966]. Одним из способов такого синтеза является построение зависимостей между характеристиками элементов системы и их повторяемостью. Таковыми могут быть функции распределения вероятности характеристик системы или функции повторяемость – магнитуда. Такие функции обычно описываются некоторой формулой, включающей несколько параметров, эти формулы и параметры и являются синтезом системы. Иногда один и тот же тип функций может быть применён для описания самых разных сложных систем. В частности, при использовании для синтеза системы функции повторяемость – магнитуда очень часто выясняется, что эта функция степенного вида. Например, степенные функции с отрицательным показателем степени настолько распространены при описании самых разных явлений от геофизики до лингвистики, что П. Бэк (1997) выделил целый класс сложных систем, характеризуемых такой функцией повторяемость – магнитуда. Он предположил, что такие системы находятся в состоянии самоорганизующегося кризиса (self organized criticality), когда при малых изменениях внешних условий происходят существенные изменения характеристик системы.

Степенные функции часто фигурируют при рассмотрении структуры русловой сети. Примером является рис. 33 в книге М.С. Карасева и Г.И. Худякова (1984), показывающий обратную линейную зависимость логарифма количества водотоков от логарифма их порядка по Шриву (или от порядка по Шайдеггеру), т.е. структура водотоков в бассейне р. Илистой (Дальний Восток) характеризуется степенной функцией с отрицательным показателем степени.

М.С. Карасев и Г.И. Худяков (1984) используют кодирование водотоков «сверху-вниз» по Р.Е. Хортону (1948), когда назначаются точки истоков бесприточных водотоков первого порядка, слияние которых даёт исток водотока второго порядка и т.д. Эта система активно используется и имеет множество модификаций используемого кода водотоков. Более традиционная гидрографическая процедура выделения разных рек «снизу-вверх» предполагает назначение устья и истока для главной реки, затем для всех притоков, впадающих в главную реку, далее для притоков этих притоков и т.д., вплоть до бесприточных водотоков (постоянных и временных). В качестве кода обычно используются названия водотоков или последовательные номера. Гидрографическая система кодирования будет использована в настоящей статье для анализа структуры русловых сетей с помощью функций повторяемость – магнитуда.

---

[1] Выполнено по плану НИР научно-исследовательской лаборатории эрозии почв и русловых процессов им. Н.И. Маккавеева.

Русловые сети Северной Евразии
(в пределах территории бывшего СССР)

Наиболее объективным источником рисунка речной сети являются аэро- и космические изображения крупного масштаба, полученные как в оптическом, так и в иных диапазонах. Их интерпретацией являются топографические карты крупного масштаба, на которых постоянные и пересыхающие водотоки показаны синими сплошными и прерывистыми линиями и лентами, а уровень генерализации регламентируется соответствующими наставлениями. Если источник информации содержит данные о вертикальных координатах и характере подстилающей поверхности, то рисунок эрозионно-русловой и речной сети можно получить обработкой цифровой модели местности, в первую очередь, цифровой модели рельефа. Достоверность результата будет определяться горизонтальным разрешением изображения (размером пикселя) и разрешением съёмки по вертикали, а также способом получения упорядоченной цифровой модели рельефа из цифрового массива координат.

Для территории Северной Евразии в настоящее время нет полных цифровых моделей местности достаточного разрешения для анализа рисунка речных сетей. Поэтому в настоящем исследовании мы воспользовались результатами инвентаризации водных объектов СССР, выполненной в 1960-1966 гг. управлениями Гидрометеослужбы СССР. Задачей инвентаризации являлся подсчёт числа и размеров водотоков по единой методике [Доманицкий и др., 1971] и на единой картографической основе (карта масштаба 1:100000). Были составлены списки всех рек длиной более 10 км, измерена их длина, а для более крупных рек (в среднем длиной свыше 50 км) определена площадь их водосбора. Самые малые (менее 10 км длиной, но не менее 0,5 км в равнинных районах и 1 км в горных) реки и их длина подсчитывались суммарно по бассейнам малых и средних рек. Измерение длин водотоков производилось различно: большие, средние и малые реки, заносившиеся в список, измерялись циркулем с постоянным раствором, как правило, 1 мм по осевой линии, малые реки (и некоторые средние) измерялись курвиметром. Результаты инвентаризации сведены в многотомное издание «Гидрологическая изученность» [Ресурсы…, 1958-1962] и неоднократно использованы в сводных работах [Доманицкий и др., 1971, Нежиховский, 1971].

Рассмотрим сводную таблицу для всех рек СССР из работы [Доманицкий и др., 1971, таблица 2]. В этой таблице для всей территории СССР имеются сведения о магнитуде (средняя длина водотоков L) и о повторяемости: третья колонка – количество водотоков в данном диапазоне длин N и четвёртая колонка – суммарная длина водотоков в данном диапазоне длин LN. Соответствующие функции повторяемость–магнитуда имеют следующий вид (рис. 1):

$$\frac{\Delta N}{\Delta L} = M_1 L^{-1-D}, \qquad (1)$$

$$\frac{\Delta LN}{\Delta L} = M_1 L^{-D}. \qquad (2)$$

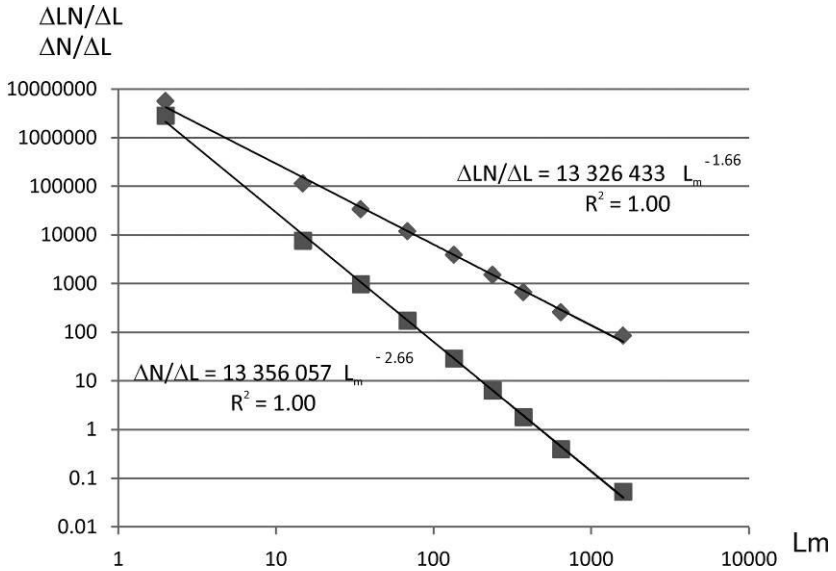

Рисунок 1. Зависимости плотности количества ($\Delta N/\Delta L$) и суммарной длины ($\Delta NL/\Delta L$) водотоков от длины водотока L.

Эти две степенные функции характеризуют одну и ту же структуру и взаимосвязаны. Они имеют вид, удобный для математических преобразований, и легко приводятся к функции распределения вероятностей длин водотоков делением на общее число водотоков в системе N_0 или общую длину водотоков L_0

$$\frac{\Delta N}{N_0 \Delta L} = \frac{dp_N}{dL} = \frac{M_1}{N_0} L^{-1-D}, \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta LN}{L_0 \Delta L} = \frac{dp_{NL}}{dL} = \frac{M_1}{L_0} L^{-D}. \qquad (4)$$

По таблице можно получить также и функции интегрального вида (рис. 2). Если суммируются количества рек длиной менее данной (которой является нижняя граница каждой из девяти градаций в таблице) и также в логарифмических координатах строится график зависимости суммарного количества N от магнитуды – длины реки на нижней границе каждой из градаций, то получаем формулу:

$$\sum N = M_2 L^{-D} \qquad (5)$$

Формулу (5) часто проще получить по эмпирическим данным, чем формулу (1), а все параметры у этих функций одинаковы.

Если суммируются длины рек длиной менее данной (которой является нижняя граница каждой из девяти градаций в таблице) и также в логарифмических координатах строится график зависимости суммарной длины $\sum L$ от магнитуды – длины реки на нижней границе каждой из градаций, то получаем формулу:

$$\sum L = M_3 L^{1-D} \qquad (6)$$

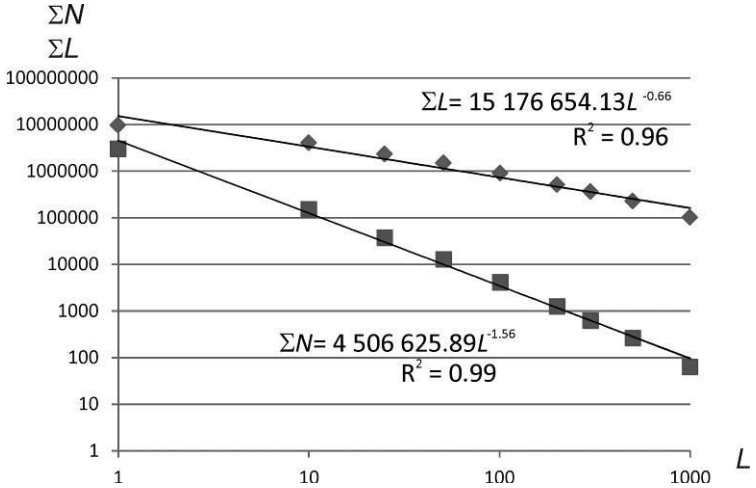

Рисунок 2. Зависимости суммарных количества (ΣN) и длины (ΣL) водотоков от длины водотока L.

Структура речных сетей территории бывшего СССР хорошо синтезируются в степенных функциях, которые полностью описываются двумя параметрами – показателем степени D и коэффициентом M_i. Такие функции можно построить по данным «Гидрологической изученности» [Ресурсы…, 1958-1962] для всех приведённых в этом издании систем водотоков.

Графики зависимостей повторяемость – магнитуда (в виде функции 6) для ряда крупных рек Северной Евразии (рис. 3) показывают, что структура речных сетей разных речных бассейнов в целом статистически подобна – линии на рис. 3 в основном параллельны друг другу. Единый степенной закон выдерживается со средней ошибкой аппроксимации 32%. Наклон каждой линии несколько меняется с изменением длины водотока на всём протяжении графика. Тем не менее, можно выбрать достаточно протяжённые части графиков (с $10 < \delta_i < 100$ км), которые довольно хорошо аппроксимируются единым степенным законом с показателем степени D_1, равным среднему – D. Степенные функции (1)-(3) также аппроксимируют исходные данные со средней ошибкой 28-38%, так что выбор той или иной функции диктуется общими соображениями, например – соответствие вида степенной функции положениями фрактального подхода.

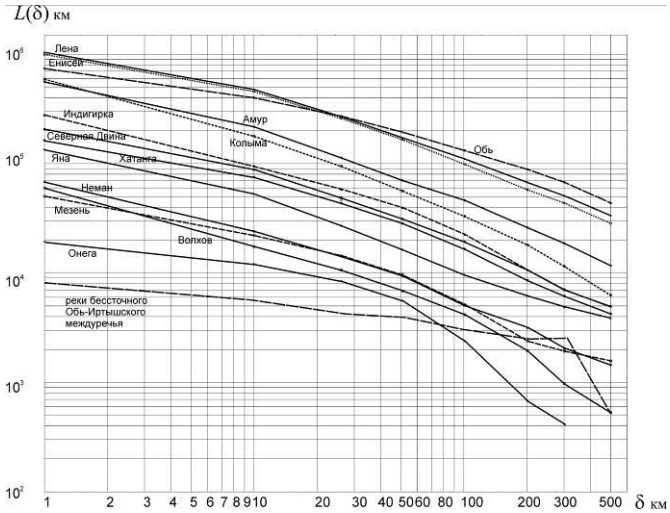

Рисунок3. Зависимость общей длины $L_i(\delta)$ от длины измерителя δ_i для крупных речных бассейнов Северной Евразии (Б) [Доманицкий и др., 1971, таблица 2].

Степенные функции повторяемость – магнитуда и фрактальный подход

То, что речные сети фрактальны, предположил Мандельброт [Mandelbrot, 1977], приведя в качестве доказательства степенную зависимость между длиной рек и площадью их бассейна, известную в западной литературе как закон Хэка [Hack, 1957]. После этого оценкой фрактальной размерности речных сетей занималось большое число исследователей. Так, на русском языке имеются общие работы по применению фрактального подхода в географии, геоморфологии и гидрологии [Никора, 1988; Васильев, 1992; Пузаченко, 1997; Мельник, Поздняков, 2008], в последнее время появились работы по использованию фрактального подхода для анализа речных сетей [Балханов, Башкуев, 2004; Иванов и др., 2006; Мельник, 2007; Учаев, 2007; Чупикова, 2010].

Термин «фрактал» был предложен Мандельбротом для обозначения сложных геометрических фигур, которые при неограниченном увеличении разрешения (увеличении изображения, масштабировании, скейлинге) не теряют своей сложности. Мандельброт определил фрактал как: «… множество, размерность Хаусдорфа – Безиковича для которого строго больше его топологической размерности». В случае русловых сетей таким множеством является множество точек, образующих рисунок русловой сети, топологической размерностью этого множества будет 1 (размерность линии). Размерность Хаусдорфа-Безиковича D определяется как критическая размерность, при которой некоторая мера M_d, представляемая как сумма некоторой пробной функции $\gamma(d)\delta^d$, в пределе скачком изменяет своё значение с 0 на бесконечность:

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow[\delta\to 0]{} \begin{cases} 0 \text{ при } d > D \\ \infty \text{ при } d < D \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь δ – характерный размер некоторого измерителя, N – количество необходимых измерителей, чтобы покрыть геометрическую фигуру. Если измерителями являются прямолинейные отрезки (случай речной сети), то δ суть их длины, а коэффициент $\gamma(d)$ равен 1. При d, равном размерности Хаусдорфа-Безиковича D и $\delta \to 0$, $N \to \infty$, мера M_D приобретает определённое значение. В этом предельном случае

$$\delta^D = \frac{M_D}{N(\delta)} \qquad (8)$$

или

$$N(\delta) = M_D \delta^{-D} \qquad (9)$$

Формулу (8) можно представить в виде

$$\delta^{D-1} = \frac{M_D}{\delta N(\delta)} = \frac{M_D}{L(\delta)} \qquad (10)$$

или

$$L(\delta) = M_D \delta^{1-D} \qquad (11)$$

В этой формуле $L(\delta)$ представляет собой суммарную длину всех отрезков длиной δ. Нетрудно видеть, что если длину отрезка, которым измеряется фрактальная линия, заменить на длину водотока, то формула (11) становится эквивалентной формуле (6). Тогда показатель степени D можно именовать фрактальной размерностью речной сети, а коэффициент $M_3=M_D$ – мерой структуры речной сети. Необходимо заметить, что при соответствующей замене в формуле (9) она не становится эквивалентной формуле (5), так как $N(\delta)$ в (8) и (9) представляет собой количество отрезков одинаковой длины δ, которые укладываются в длине фрактальной линии, а N в формуле (5) представляет собой суммарное число водотоков разной длины.

Величина фрактальной размерности указывает на степень нелинейности увеличения общей длины речной сети по мере включения в неё элементов с уменьшающейся длиной, а также на степень неравномерности вклада относительно более длинных и относительно более коротких рек в общую длину речной сети. При $D > 1$ прирост общей длины речной сети с уменьшением δ тем больше, чем меньше δ и чем больше D. Это означает, что с увеличением D в древовидном рисунке речной сети и в общей её длине начинают всё более и более доминировать реки относительно малой длины. Так, вклад рек ΔL в диапазоне длин от δ_1 до δ_2 ($\delta_2>\delta_1$) в общую длину речной сети $P = \frac{\Delta L}{\sum L_{>\delta 0}}$ связан с фрактальной размерностью зависимостью

$$P = \left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)^{1-D} - \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{1-D} \qquad (12).$$

Здесь δ_0 – самая малая длина измерителя для естественного фрактала, в случае речных сетей Северной Евразии равная 1 км. Из (12) следует, что доля рек с длинами в диапазоне 1-10 км изменяется от ~20% при D=1,1 до 90% при $D \to 2$.

Величина меры M_D равна суммарной длине речной сети при δ=1. Это очень удобно, так как все справочные источники содержат сведения о полной длине речной сети, т.е. о сумме длин рек с минимальной длиной около 1 км, которая и есть мера M_D в километровых единицах. Мера и фрактальная размерность для рек Северной Евразии между собой не связаны, так как при одинаковой общей длине речной сети на водосборе распределение рек по диапазонам длин может быть самое разное.

Вышеописанные характеристики величин M_D и D не требуют фрактальных терминологии и подхода, они просто следуют из рассмотрения эмпирических формул (4) и (5). Если же применить фрактальный подход и трактовать D как нецелую размерность неэвклидова вида, то возникают дополнительные соображения. Все эмпирические данные о структуре речных сетей (рис. 4) дают величины фрактальной размерности в диапазоне 1,2-1,9, т.е. больше эвклидовой размерности линии (единица) и меньше эвклидовой размерности плоскости (два). Обычно говорят о степени покрытия плоскости линиями фрактального объекта, которая увеличивается с увеличением D. Для речных сетей можно сделать вывод, что площадь водосбора F должна положительно коррелироваться с мерой M_D, а фрактальная размерностью D – с густотой речной сети. Эмпирические данные (вычислялась фрактальная размерность D_1 в диапазоне длин водотоков 1-10 км) подтверждают такие корреляции (рис. 5): площади водосборов рек Северной Евразии линейно связаны с мерами M_D (т.е. суммарными длинами рек длиной не менее 1 км), а отношения K_D=M_D/F (которые можно назвать фрактальной густотой речной сети) – с фрактальными размерностями (рис. 6). Общая связь (достоверность аппроксимации R^2=0,608) выглядит следующим образом:

$$M_D = 1{,}4(D_1 - 1)F \qquad (13)$$

В области больших значений фрактальной размерности эта связь лучше аппроксимируется экспонентой

$$\frac{M_D}{F} = 0{,}17 \exp[2{,}77(D_1 - 1)] \qquad (14)$$

но достоверность аппроксимации слегка уменьшается (R^2=0,58).

Достоверность аппроксимации незначительно увеличивается при использовании более сложных полиномиальных описаний зависимости на рис. 6. Так, при аппроксимации полиномом второй степени R^2 = 0,611

$$\frac{M_D}{F} = 0.77(D_1 - 1)^2 + 0.84(D_1 - 1) + 0.1 \qquad (15)$$

Нелинейные аппроксимации дают положительный свободный член. Тогда при фрактальной размерности D_1=1 имеется ненулевая густота речной сети M_D/F = 0.1–0.17, что имеет определенный физический смысл.

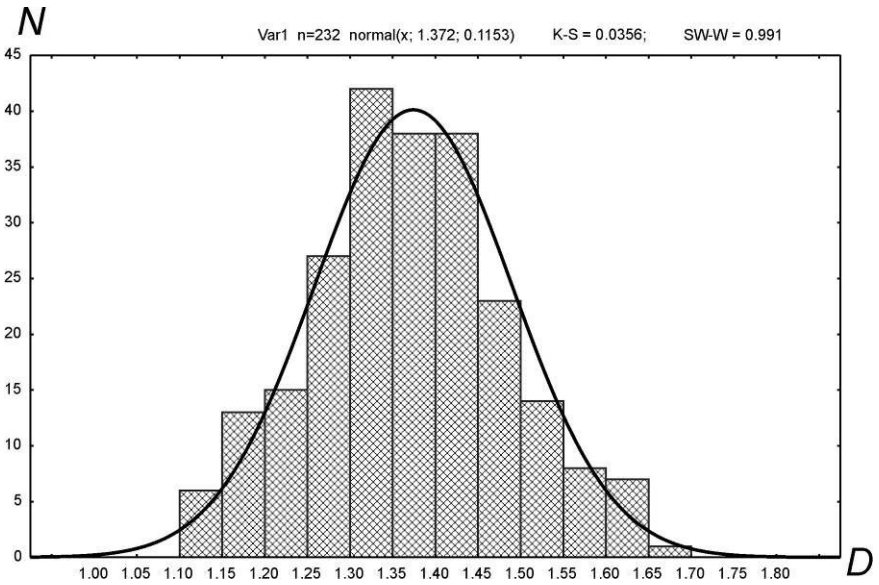

Рисунок 4. Гистограмма величин фрактальной размерности D_1 для речных бассейнов Северной Евразии.

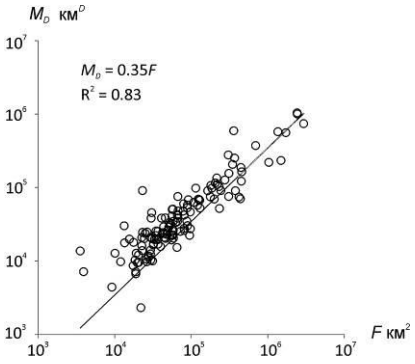

Рисунок 5. Связь меры M_D (км^D) с площадью водосбора F (км^2) для рек Северной Евразии.

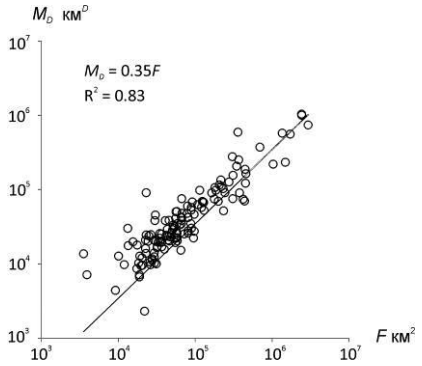

Рисунок 6. Связь густоты K_D (км^D/км^2) с величиной фрактальной размерности D_1 речных сетей Северной Евразии.

Гидрологическая индикация на основе структуры речных сетей

Структура речной сети рассматривалась как характеристика водоносности рек начиная с работ Р.Е. Хортона (1948). Большой вклад в решение этих вопросов внесли И.Н. Гарцман (1973), Н.И. Алексеевский (2000). Эти исследователи использовали систему кодирования водотоков Р.Е. Хортона в той или иной модификации. Однако Н.И. Алексеевский часто пользовался для вычисления порядка водотока по его длине, что сближает наши подходы.

Гидрологическая индикация по структуре речной сети наиболее эффективна для отдельных речных бассейнов с однородными литологическими и геоморфологическими условиями [Алексеевский, Сидорчук, 1992]. Однако наиболее общие характеристики удобно рассмотреть в широком диапазоне условий формирования гидроморфологии рек. Поэтому воспользуемся данными табл. 3 из [Доманицкий и др., 1971], где обобщена информация о речных бассейнах всей территории Северной Евразии.

Расход воды Q в замыкающих створах этих бассейнов связан с общей длиной речной сети M_D (рис. 7):

$$Q = 0{,}016 M_D \qquad (16)$$

Достоверность аппроксимации R^2= 0,92, и это больше, чем достоверность аппроксимации 0,84 в линейной зависимости расход воды Q – площадь бассейна F

$$Q = 0{,}06 F \qquad (17)$$

Таким образом, элемент структуры речной сети (её общая длина) лучше характеризует сток воды, чем площадь водосбора.

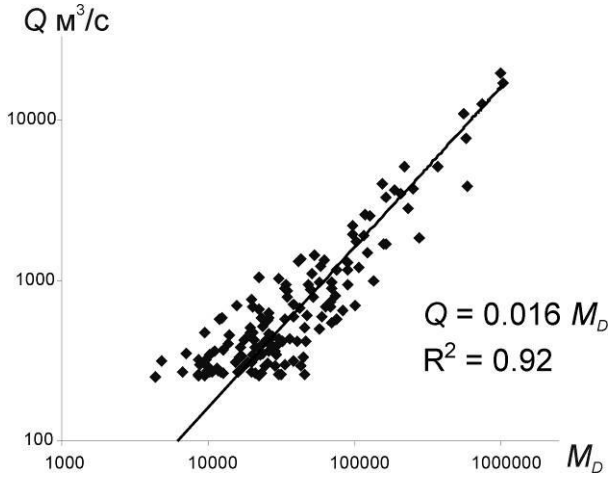

Рисунок 7. Связь расхода воды в замыкающем створе речного бассейна от суммарной длины водотоков в этом бассейне.

Тем не менее, разброс в зависимости (16) велик, особенно в области малых значений расходов воды. Это обусловлено в первую очередь разнообразием гидроморфологических условий на водосборе, но частично определяется и структурой речной сети. При одинаковой суммарной длине водотоков на водосборе M_D=*const* в структуре речной сети тем больше малых водотоков и тем меньше крупных водотоков, чем больше фрактальная размерность сети *D*. Следовательно, при сравнении бассейнов с одинаковыми суммарными длинами русловой сети, большая фрактальная размерность указывает на меньший сток воды. Эта тенденция достаточно отчётливо проявляется в данных измерений (рис. 8) и её учёт увеличивает возможности гидрологической индикации на основе изучения структуры речной сети:

$$Q = 0{,}01\frac{M_D}{\sqrt{D_1 - 1}} \qquad (18)$$

Достоверность аппроксимации формулы (18) равна 0,94 (рис. 9).

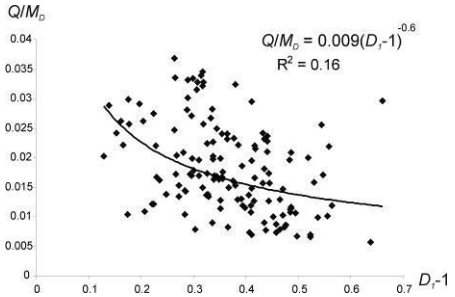

Рисунок 8. Отражение водоносности рек на фрактальной размерности русловой сети.

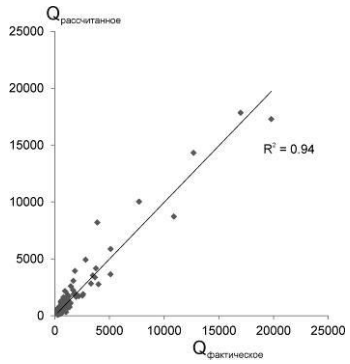

Рисунок 9. Рассчитанные расходы воды по данным о структуре речной сети (формула 18) и измеренные величины расходов.

Степенные зависимости для эрозионных сетей

Степенные зависимости повторяемость – магнитуда и фрактальные свойства для сети водотоков на поверхности водосборного бассейна исследуются в широком диапазоне масштабов. Информация о структуре постоянных водотоков на территории Северной Евразии доступна до минимальных длин водотоков около 1 км. В период снеготаяния на многих водосборах возникает сеть водотоков с характерными минимальными длинами до нескольких метров, а во время дождей – до нескольких сантиметров. Фрактальная размерность сетей этих временных водотоков существенно изменяется во времени и в пространстве. В экспериментах [Tomassone, Krim, 1996] она составляла 1,4-1,5, т.е. была близка к среднему значению для речных сетей

(рис. 3). Для системы пор в почвах, которые можно рассматривать как самое верхнее звено в сети потоков воды на речном водосборе, указываются величины фрактальной размерности в диапазоне 1,2-1,7 [Crawford, Matsui, 1996]. Таким образом, диапазон физических пределов для степенных зависимостей повторяемость – магнитуда и фрактальных характеристик сетей водотоков составляет несколько тысяч километров – доли миллиметра. Нижний предел определяется молекулярными свойствами воды и структурой почв.

Эрозионные сети отличаются от сети водотоков наличием дополнительного нижнего предела – предела эрозионной способности потока. Он может быть выражен критической неразмывающей скоростью потока и является комплексной характеристикой свойств потока и размываемого грунта [Мирцхулава, 1988]. В результате наличия такого предела [Хортон, 1948] в верхней части речного бассейна формируется пояс невыявленной эрозии [Маккавеев, 1971], где эрозионная сеть слабо развита и эфемерна. Поэтому степенные зависимости, характерные для сети водотоков, трансформируются для эрозионной сети (например, овражно-балочной) в зависимости иного типа (рис. 10), где количество элементов эрозионных сетей стремится к нулю с уменьшением их длины. Фрактальные размерности для овражно-балочных сетей также стремятся к нулю с уменьшением размеров измерителя, что хорошо показано на примере территории Саратовского Поволжья [Иванов и др., 2006].

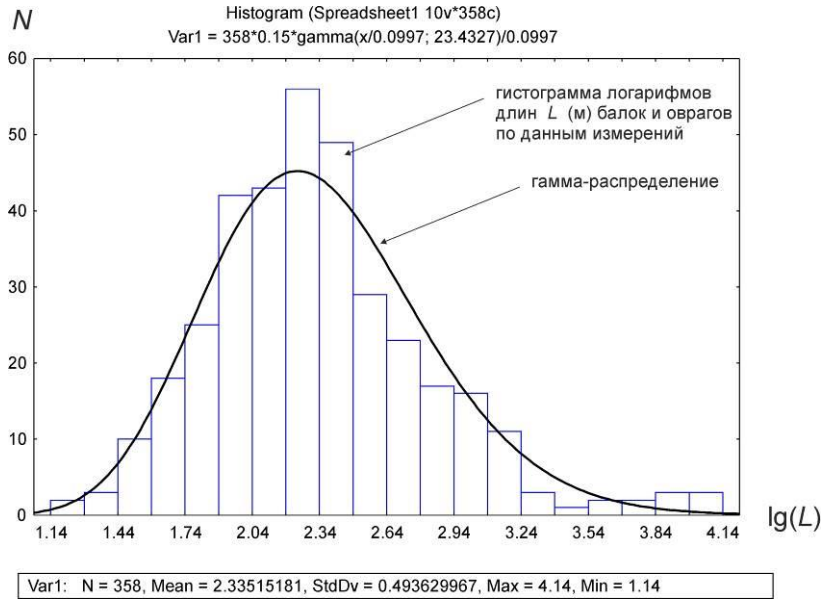

Рисунок 10. Гамма-функция распределения вероятности для логарифмов длин элементов овражно-балочных систем в бассейне р. Сейм (Курская область).

Выводы

Анализ структуры речных сетей Северной Евразии указывает как на наличие нескольких типов зависимостей повторяемость – магнитуда степенного вида. Эти зависимости описываются двумя параметрами – отрицательным показателем степени D и коэффициентом M. Один из вариантов степенных зависимостей – связь суммы длин водотоков (от самого крупного до данного) от длины водотока совпадает с зависимостью Хаусдорфа – Безиковича для фрактальных объектов.

Структуры речных сетей Северной Евразии дают эмпирические величины фрактальной размерности в диапазоне 1,1-1,7. Таким образом, все исследованные речные сети соответствуют положениям фрактального подхода, согласно которому их фрактальная размерность должна быть больше эвклидовой размерности линии (единица) и меньше эвклидовой размерности плоскости (два).

В рамках фрактального подхода с увеличением фрактальной размерности D увеличивается степень покрытия плоскости линиями фрактального объекта. Для речных сетей Северной Евразии это положение полностью подтверждается эмпирической зависимостью (13). Меры M_D положительно коррелированы с площадями водосборов F, а для водосборов равной площади величина меры (т.е. характеристика суммарной длины фрактальной речной сети) увеличивается с увеличением фрактальной размерности. Это означает, что с увеличением фрактальной размерности увеличивается степень покрытия площадей водосборов Северной Евразии линиями речной сети.

Меры M_D также положительно коррелированы с расходами воды в замыкающих створах и могут быть использованы для гидрологической индикации. Увеличение фрактальной размерности при прочих равных условиях указывает на уменьшение величины стока воды с данного водосбора.

Физические пределы размеров элементов сетей водотоков шире, чем для сетей линейных эрозионных форм, так как существует предел эрозионной способности потоков воды. В результате сети эрозионных форм описываются асимметричными функциями повторяемость – магнитуда нестепенного вида, для них характерно стремление числа эрозионных форм минимального размера к нулю.

Использование степенных зависимостей повторяемость – магнитуда и фрактального подхода существенно увеличивает возможности количественного описания речных и эрозионно-русловых сетей.

Литература

Алексеевский Н.И. Индикационные методы гидроморфологических исследований // Эрозия почв и русловые процессы. Вып.12. М.:Изд-во МГУ. 2000.

Алексеевский Н.И., Сидорчук. А.Ю. Ускоренная эрозия в нарушенных горными работами ландшафтах (на примере бассейнов рек Омолоя и Яны) // Экологические проблемы эрозии почв и русловых процессов. М.: Изд-во МГУ. 1992.

Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальная размерность структуры русловой сети дельты Селенги // Водные ресурсы. 2004. Т.31. №2.

Васильев Л.Н. Фрактальность и самоподобие природных пространственных структур // Изв. РАН. Сер. геогр. 1992. №5.

Гарцман И.Н. Топология речных систем и гидрографические индикационные исследования // Водные ресурсы. 1973. №3.

Доманицкий А.П., Дубровина Р.Г., Исаева А.И. Реки и озёра Советского Союза. Л.: Гидрометеоиздат. 1971.

*Карасев М.*С., *Худяков Г.И.* Речные системы на примере Дальнего Востока. М.: Наука. 1984.

Иванов А.И., Короновский А.А., Минюхин И.А., Яшков И.А. Определение фрактальной размерности овражно-балочной сети города Саратова // Прикладная нелинейная динамика (Известия вузов). 2006. Т.14. №2.

Маккавеев Н.И. Сток и русловые процессы. М.: Изд-во МГУ. 1971.

Мельник М.А. Фрактальные закономерности форм рельефа (на примере эрозионного расчленения поверхности и извилистости рек): Автореф. дис. … канд. геогр. наук. Томск: СО РАН. 2007.

Мельник М.А., Поздняков А.В. Фракталы в эрозионном расчленении поверхности и автоколебания в динамике геоморфосистем // Геоморфология. 2008. №3.

Месарович М. Основания общей теории систем // Общая теория систем. М.: Наука. 1966.

Мирцхулава Ц.Е. Основы физики и механики эрозии русел. Л.: Гидрометеоиздат. 1988.

Нежиховский Р.А. Русловая сеть бассейна и процесс формирования стока воды Л.: Гидрометеоиздат. 1971.

Никора В.И. Фрактальные свойства некоторых гидрологических объектов. Кишинев: ИГИГ АН МССР. 1988.

Пузаченко Ю.Г. Приложение теории фракталов к изучению структуры ландшафта // Изв. РАН. Сер. геогр. 1997. №2.

Ресурсы поверхностных вод СССР. Гидрологическая изученность. Т.1-20. Л.-М.: Гидрометеоиздат. 1958-1962.

Учаев Д.В. Методика геоинформационного моделирования речных сетей на основе фрактальных методов. Автореф. дис. … канд. техн. наук. М.: МИИГАиК. 2007.

Хортон Р.Е. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. М.-Л.: Изд-во иностр. лит. 1948.

Чупикова С.А. Фрактальные методы выявления скрытой регулярности в эрозионном расчленении поверхности (на примере анализа Саяно-Тувинского нагорья, Республика Тува). Автореф. дис. … канд. геогр. наук. Томск: СО РАН. 2010.

Bak P. How Nature Works: The Science of Self-organized Criticality. Oxford University Press: Oxford. 1997.

Crawford J. W., Matsui N. Heterogeneity of the pore and solid volume of soil: distinguishing a fractal space from its non-fractal complement // Geoderma. 1996. 73.

Hack J. Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland // U.S. Geological Survey Professional Paper 294-B. 1957.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Chance, and Dimension. San Francisco: W.H. Freeman. 1977.

Tomassone M.S., Krim, J. Fractal scaling behavior of water-flow patterns on inhomogeneous surfaces, Physical review. E // Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics. 54(6). 1996.